04

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ die Gültigkeit folgender Ungleichung zu beweisen:

$2n + 1 < 2^n$

Lösung:

A(3): $2 \cdot 3 + 1 < 2^3$

$7 < 8$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $2n + 1 < 2^n$

A(n+1): $2 \cdot (n + 1) + 1 < 2^{n+1}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$2 \cdot (n + 1) + 1 < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2n + 1 + 2 < 2 \cdot 2^n$

$2n + 1 < 2^n$

$\Leftrightarrow 2n + 1 + 2 < 2^n + 2$

$2^n + 2 < 2 \cdot 2^n$

$\Leftrightarrow 2^n + 2 < 2^n + 2^n$

$\Leftrightarrow 2 < 2^n$

Wenn $2n + 1 + 2 < 2^n + 2$ und $2^n + 2 < 2 \cdot 2^n$

dann gilt auch $2n + 1 + 2 < 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow 2n + 1 + 2 < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2 \cdot (n + 1) + 1 < 2^{n+1}$

Was zu beweisen war.