05

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ die Gültigkeit folgender Ungleichung zu beweisen:

$n^2 \leq 2^n$

Lösung:

A(4): $4^2 \leq 2^4$

$16 \leq 16$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $n^2 \leq 2^n$

A(n+1): $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$(n+1)^2 \leq 2^{n+1} \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 \leq 2 \cdot 2^n$

$n^2 \leq 2^n$

$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$

$2^n + 2n + 1 \leq 2 \cdot 2^n$

$\Leftrightarrow 2^n + 2n + 1 \leq 2^n + 2^n$

$\Leftrightarrow 2n + 1 \leq 2^n$

Das gilt wie in Aufgabe 04 bewiesen

Wenn $n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$ und $2^n + 2n + 1 \leq 2 \cdot 2^n$

dann gilt auch $n^2 + 2n + 1 \leq 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

Was zu beweisen war.