06

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Ungleichung zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{1}$

$\frac{1}{\sqrt{1}} \geq 1$

$1 \geq 1$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Es ist zu zeigen, dass

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geq \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n} + 1 \geq n+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n} \geq n \quad \text{quadrieren}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \cdot n \geq n^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n \geq n^2$$

Was zu beweisen war.