07

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} 2k(k+1)(k+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{2}$

$$2 \cdot 1(1+1)(1+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{2}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2}$$

12 = 12 womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} 2k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} 2k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} 2k(k+1)(k+2) + 2(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2} + 2(n+1)(n+2)(n+3) = (n+1)(n+2)(n+3)\left[\frac{n}{2}+2\right]$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n+4}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2}$$

Was zu beweisen war.