08

Es ist zu beweisen, dass die natürliche Zahl $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Lösung:

$$6 \mid n^3 - n$$

$$A(1): 6 \mid 1^3 - 1 = 6 \mid 0$$

$$A(2): 6 \mid 2^3 - 2 = 6 \mid 8 - 2 = 6 \mid 6$$

womit der Induktionsanfang gilt.

$$A(n): 6 \mid n^3 - n$$

A(n+1):

$$\begin{aligned} 6 \mid (n+1)^3 - (n+1) &= 6 \mid (n+1)(n+1)^2 - n - 1 = 6 \mid (n+1)(n^2 + 2n + 1) - n - 1 \\ &= 6 \mid n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - n - 1 = 6 \mid n^3 + 3n^2 + 2n \end{aligned}$$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $n^3 + 3n^2 + 2n$ durch „Abspalten“ umzuformen:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - n + x$$

$$x = n^3 + 3n^2 + 2n - n^3 + n = 3n^2 + 3n = 3 \cdot n \cdot (n+1)$$

Also gilt

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - n + 3 \cdot n \cdot (n+1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $6 \mid n^3 - n$, folglich ist nur noch zu zeigen, dass auch

$6 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$ gilt.

$6 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$ folgt aus der Gültigkeit von $3 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$ und $2 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$.

$3 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$ ist offensichtlich.

Wenn n eine gerade Zahl ist gilt $2 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$, weil $2 \mid 3 \cdot n$ gilt; ist n eine ungerade Zahl, so

gilt $2 \mid 3 \cdot n \cdot (n+1)$ weil $2 \mid (n+1)$.

Was zu beweisen war.