11

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ und für alle reellen Zahlen a und $q \neq 1$ die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Lösung:

$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ ergibt durch Umformung $a\sum_{k=0}^{n} q^k = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

A(1): $a\sum_{k=0}^{1} q^k = a \cdot \frac{q^{1+1} - 1}{q - 1}$

$$a(q^0 + q^1) = a \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1}$$

$$a \cdot (q+1) = a \cdot \frac{(q+1)(q-1)}{q - 1}$$

$a \cdot (q+1) = a \cdot (q+1)$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $a\sum_{k=0}^{n} q^k = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

A(n+1): $a\sum_{k=0}^{n+1} q^k = a \cdot \frac{q^{n+1+1} - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$a\sum_{k=0}^{n+1} q^k = a\sum_{k=0}^{n} q^k + aq^{n+1} = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + aq^{n+1} = \frac{a(q^{n+1} - 1) + aq^{n+1}(q-1)}{q - 1} = \frac{aq^{n+1} - a + aq^{n+1}(q-1)}{q - 1}$$

$$= \frac{aq^{n+1} - a + aq^{n+1} \cdot q - aq^{n+1}}{q - 1} = \frac{aq^{n+2} - a}{q - 1} = \frac{a(q^{n+2} - 1)}{q - 1} = a \cdot \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

Was zu beweisen war.