14

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1}$

$$\frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Was zu beweisen war.