16

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ zu beweisen.
$5^n + 7$ ist stets durch 4 teilbar.

Lösung:

A(1): $4 \mid 5^1 + 7 = 4 \mid 12$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $4 \mid 5^n + 7$

A(n+1): $4 \mid 5^{n+1} + 7$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $5^{n+1} + 7$ durch „Abspalten" umzuformen:
$5^{n+1} + 7 = 5^n + 7 + x$

$x = 5^{n+1} + 7 - 5^n - 7 = 5^{n+1} - 5^n = 5 \cdot 5^n - 5^n = 5^n(5-1) = 4 \cdot 5^n$

Also gilt
$5^{n+1} + 7 = 5^n + 7 + x = 5^n + 7 + 4 \cdot 5^n$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $4 \mid 5^n + 7$ und es ist offensichtlich, dass $4 \mid 4 \cdot 5^n$ gilt.

Was zu beweisen war.