17

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und $k \geq 2$ zu beweisen.
$k^n - 1$ ist stets durch $k - 1$ teilbar.

Lösung:

A(1): $2-1 \mid 2^1 - 1 = 1 \mid 1$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $k-1 \mid k^n - 1$

A(n+1): $k-1 \mid k^{n+1} - 1$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $k^{n+1} - 1$ durch „Abspalten" umzuformen:
$k^{n+1} - 1 = k^n - 1 + x$

$x = k^{n+1} - 1 - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k \cdot k^n - k^n = k^n(k-1)$

Also gilt
$k^{n+1} - 1 = k^n - 1 + x = k^n - 1 + k^n \cdot (k-1) = k^n - 1 + (k-1) \cdot k^n$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $k-1 \mid k^n - 1$ und offensichtlich gilt $k-1 \mid (k-1) \cdot k^n$.

Was zu beweisen war.