20

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Teilbarkeitsaussage zu beweisen.

$47 \mid 7^{2n} - 2^n$

Lösung:

A(1): $47 \mid 7^{2\cdot 1} - 2^1$

$47 \mid 7^2 - 2$

$47 \mid 49 - 2$

$47 \mid 47$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $47 \mid 7^{2n} - 2^n$

A(n+1): $47 \mid 7^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 47 \mid 7^{2n+2} - 2^{n+1}$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $7^{2n+2} - 2^{n+1}$ durch „Abspalten" umzuformen:

$7^{2n+2} - 2^{n+1} = 7^{2n} - 2^n + x$

$x = 7^{2n+2} - 2^{n+1} - 7^{2n} + 2^n = 7^{2n+2} - 7^{2n} - 2^{n+1} + 2^n = 7^2 \cdot 7^{2n} - 7^{2n} - 2 \cdot 2^n + 2^n = (49-1) \cdot 7^{2n} + (-2+1) \cdot 2^n$

$= 48 \cdot 7^{2n} - 2^n = (1+47) \cdot 7^{2n} - 2^n = 7^{2n} - 2^n + 47 \cdot 7^{2n}$

Also gilt

$7^{2n+2} - 2^{n+1} = 7^{2n} - 2^n + x = 7^{2n} - 2^n + 7^{2n} - 2^n + 47 \cdot 7^{2n} = 7^{2n} + 7^{2n} - 2^n - 2^n + 47 \cdot 7^{2n}$

$= 2 \cdot 7^{2n} - 2 \cdot 2^n + 47 \cdot 7^{2n} = 2 \cdot (7^{2n} - 2^n) + 47 \cdot 7^{2n}$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $47 \mid 7^{2n} - 2^n$, folglich auch $47 \mid 2 \cdot (7^{2n} - 2^n)$ und $47 \mid 47 \cdot 7^{2n}$.

Was zu beweisen war.