21

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und $a \geq 0$ ist die Gültigkeit folgender Teilbarkeitsaussage zu beweisen. (Verweis auf Aufgabe 08)

$6 \mid a^{2n+1} - a$

Lösung:

A(1): $6 \mid a^{2\cdot 1+1} - a$

$6 \mid a^3 - a$ womit der Induktionsanfang gilt und wie in Aufgabe 08 bewiesen.

A(n): $6 \mid a^{2n+1} - a$

A(n+1): $6 \mid a^{2\cdot(n+1)+1} - a = 6 \mid a^{2n+3} - a$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $a^{2n+3} - a$ durch „Abspalten" umzuformen:

$a^{2n+3} - a = a^{2n+1} - a + x$

$x = a^{2n+3} - a - a^{2n+1} + a = a^{2n+3} - a^{2n+1} = a^2 \cdot a^{2n+1} - a^{2n+1} = (a^2 - 1) \cdot a^{2n+1} = (a^2 - 1) \cdot a \cdot a^{2n} = (a^3 - a) \cdot a^{2n}$

Also gilt

$a^{2n+3} - a = a^{2n+1} - a + x = a^{2n+3} - a = a^{2n+1} - a + (a^3 - a) \cdot a^{2n}$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $6 \mid a^{2n+1} - a$. Da auch $6 \mid a^3 - a$ richtig ist, gilt somit auch

$6 \mid (a^3 - a) \cdot a^{2n}$.

Was zu beweisen war.