24

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Ungleichung zu beweisen.

$$\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Lösung:

A(1): $\frac{4^1}{1+1} \leq \frac{(2\cdot 1)!}{(1!)^2} \Leftrightarrow \frac{4}{2} \leq \frac{2!}{(1!)\cdot(1!)} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1\cdot 2}{1\cdot 1} \Leftrightarrow 2 \leq 2$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

A(n+1): $\frac{4^{n+1}}{n+1+1} \leq \frac{(2\cdot(n+1)!}{((n+1)!)^2} \Leftrightarrow \frac{4^{n+1}}{n+2} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $\frac{4^{n+1}}{n+2}$ durch „Abspalten" umzuformen:

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4^n}{n+1}\cdot x$$

$$x = \frac{4^{n+1}}{(n+2)}\cdot\frac{(n+1)}{4^n} = \frac{4\cdot 4^n\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot 4^n} = \frac{4\cdot(n+1)}{(n+2)}$$

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4^n}{n+1}\cdot x = \frac{4^n}{n+1}\cdot\frac{4\cdot(n+1)}{(n+2)}$$

Also gilt

$$\frac{4^n}{n+1}\cdot\frac{4\cdot(n+1)}{(n+2)} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{4\cdot(n+1)}{(n+2)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{4n+4}{n+2}$$

$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{4n+4}{n+2} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$ Diese Ungleichung ist mit $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ zu multiplizieren

$$\frac{4n+4}{n+2} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n!)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot n!\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!} = \frac{(2n!)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot n!\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)\cdot(2n)!}$$

$$\frac{4n+4}{n+2} \leq \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{(2n+1)\cdot 2\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{2\cdot(2n+1)}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}$$

$\frac{4n+4}{n+2} \leq \frac{4n+2}{n+1}$ Diese Ungleichung ist mit dem Hauptnenner $(n+2)\cdot(n+1)$ zu multiplizieren

$$\frac{4n+4}{n+2} \leq \frac{4n+2}{n+1} \Leftrightarrow (4n+4)\cdot(n+1) \leq (4n+2)\cdot(n+2) \Leftrightarrow 4n^2+4n+4n+4 \leq 4n^2+8n+2n+4$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+8n+4 \leq 4n^2+10n+4 \Leftrightarrow 8n \leq 10n$$

Wenn $\frac{4^n}{n+1}\cdot\frac{4\cdot(n+1)}{(n+2)} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{4n+4}{n+2}$ und $\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{4n+4}{n+2} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$

dann gilt auch $\frac{4^n}{n+1}\cdot\frac{4\cdot(n+1)}{(n+2)} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \Leftrightarrow \frac{4^{n+1}}{n+2} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$

Was zu beweisen war.