26

Seien $n \geq 1, k \geq 0$ beliebige natürliche Zahlen. Es ist zu beweisen, dass eine der n Zahlen $k, k+1, ..., k+(n-1)$ durch n teilbar ist.

Lösung:
Illustration:
Angenommen: Ist n = 5 so bedeutet das, es gibt 5 natürliche Zahlen.

k	k+1	k+2	k+3	k+(n-1)	es teilt
1	2	3	4	5	$n \mid k+(n-1)$
2	3	4	5	6	$n \mid k+3$
3	4	5	6	7	$n \mid k+2$
4	5	6	7	8	$n \mid k+1$
5	6	7	8	9	$n \mid k$
…	…	…	…	…	…
21	22	23	24	25	$n \mid k+(n-1)$

Falls $n \mid k$ gilt, dann ist nichts mehr zu beweisen.

Falls $\neg n \mid k$ gilt, dann sei $k = q \cdot n + r$ mit $r \geq 1$ und $q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}$, d.h. k ist ein Vielfaches von n mit Rest r.

Es gilt also

$k + n - r = q \cdot n + r + n - r = qn + n = n(q+1)$ und das bedeutet $n \mid q+1$, also auch $n \mid k+n-r$.

Da $r \geq 1$ folgt $n - r \leq n - 1$, was heißt, dass $k + n - r \in \{k, k+1, ..., k+(n-1)\}$.

Was zu beweisen war.