30

Es sind alle natürlichen Zahlen n und k zu bestimmen, für die $(n-1)! = n^k - 1$ gilt.

Lösung:

Grundsätzlich gilt, dass alle Fakultäten n! für $n \in \mathbb{N}$ stets natürliche Zahlen und für alle $n \geq 2$ immer gerade Zahlen sind. Deswegen muss $k \geq 1$ sein.

Ist n eine gerade Zahl, so ist $n^k - 1$ immer eine ungerade Zahl.
Also kann $(n-1)!$ nur für n = 2 ungerade sein, nämlich $(2-1)! = 1 = 2^1 - 1 = 1$.
Das erste Lösungspaar ist $(n, k) = (2,1)$. Weitere Lösungspaare für gerades n gibt es nicht.

Ist n ein ungerade Zahl, so ist $n^k - 1$ immer eine gerade Zahl mit Ausnahme des Sonderfalles n = 1, für den $(1-1)! = 0! = 1$ gilt, wofür aber kein k existiert, weil $1^k - 1 = 0$ ist.
Das nächste Lösungspaar $(n, k) = (3,1)$ erfüllt ebenfalls die Gleichung $(3-1)! = 2 = 3^1 - 1$.
Die Gleichung wird weiter durch $(n, k) = (5, 2)$ erfüllt, nämlich $(5-1)! = 24 = 5^2 - 1$.
Für $(n, k) = (7, k)$ wäre $(7-1)! = 720$, wofür es aber kein k für $7^k - 1$ gibt.
Vermutlich ist das für alle ungeraden $n \geq 7$ ebenso.

Die Gleichung $(n-1)! = n^k - 1$ wird somit nur durch die Lösungspaare $(n, k) \in \{(2,1), (3,1), (5, 2)\}$ erfüllt.