31

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung durch vollständige Induktion zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{1-1}\cdot\frac{1(1+1)}{2}$

$$(-1)^{1-1}\cdot 1^2=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}$$

$$(-1)^0\cdot 1^2=(-1)^0\cdot 1$$

$1 = 1$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\cdot k^2=(-1)^{n+1-1}\cdot\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\cdot k^2=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\cdot k^2+(-1)^{n+1-1}\cdot(n+1)^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+1-1}\cdot(n+1)^2$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=\frac{(-1)^n}{(-1)^1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=(-1)^n\left[\frac{n(n+1)}{-1\cdot 2}+(n+1)^2\right]$$

$$=(-1)^n(n+1)\left[-\frac{n}{2}+n+1\right]=(-1)^n(n+1)\left[\frac{2(n+1)-n}{2}\right]=(-1)^n(n+1)\left[\frac{2n+2-n}{2}\right]==(-1)^n(n+1)\frac{(n+2)}{2}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Was zu beweisen war.