32

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung durch vollständige Induktion zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k-1)\cdot(a+k)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

Lösung:

$$A(1): \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(a+1-1)\cdot(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)}$$

$$\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)}$$ womit der Induktionsanfang gilt.

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k-1)\cdot(a+k)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

$$A(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(a+k-1)\cdot(a+k)} = \frac{n+1}{a(a+n+1)}$$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(a+k-1)\cdot(a+k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k-1)\cdot(a+k)} + \frac{1}{(a+n+1-1)(a+n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(a+k-1)\cdot(a+k)} = \frac{n}{a(a+n)} + \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{n(a+n+1)+a}{a(a+n)(a+n+1)} = \frac{na+n^2+n+a}{a(a+n)(a+n+1)}$$

$$= \frac{n(a+n)+(a+n)}{a(a+n)(a+n+1)} = \frac{(a+n)(n+1)}{a(a+n)(a+n+1)} = \frac{n+1}{a(a+n+1)}$$

Was zu beweisen war.