36

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Aussage zu beweisen.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Lösung:

Der binomische Satz für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen Zahlen a und b heißt

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\cdot a^{n-\nu}\cdot b^{\nu}$$

Für a = 1, $b=\left(\frac{1}{n}\right)$ und $\nu = k$ ergibt sich $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$;

für a = 1, $b=\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $n = n+1$ und $\nu = k$ ergibt sich

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot 1^{n+1-k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}.$$

$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}$ enthält einen positiven Summanden mehr als $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} = \binom{n+1}{0}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{0} + \binom{n+1}{1}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1} + \ldots + \binom{n+1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n} + \binom{n+1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k} = \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{0} + \binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{1} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass für alle $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k} \leq \binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k} : \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} \leq \binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} : \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{k} : \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} \leq \binom{n+1}{k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} : \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k} \leq \binom{n+1}{k}\cdot 1$$

$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k} \leq \binom{n+1}{k}$ wird durch vollständige Induktion über k bewiesen:

A(0): $\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{0} \leq \binom{n+1}{0} \Leftrightarrow 1\cdot 1 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(k): $\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k} \leq \binom{n+1}{k}$

A(k+1): $\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} \leq \binom{n+1}{k+1}$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1}$ durch „Abspalten“ umzuformen:

$$\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}\cdot x$$

$$x = \frac{\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1}}{\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}} = \frac{\frac{n!}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1}}{\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}} = \frac{\frac{n!\cdot(n+1)^{k+1}}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!\cdot n^{k+1}}}{\frac{n!\cdot(n+1)^{k}}{(n-k)!\cdot k!\cdot n^{k}}}$$

$$= \frac{n!\cdot(n+1)^{k+1}\cdot(n-k)!\cdot k!\cdot n^{k}}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!\cdot n^{k+1}\cdot n!\cdot(n+1)^{k}} = \frac{n!\cdot(n+1)^{k}\cdot(n+1)\cdot(n-k)!\cdot k!\cdot n^{k}}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!\cdot n^{k}\cdot n\cdot n!\cdot(n+1)^{k}}$$

$$\frac{(n+1)\cdot(n-k)!\cdot k!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!\cdot n} = \frac{(n+1)\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)\cdot k!}{(n-k-1)!\cdot k!\cdot(k+1)\cdot n} = \frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n}$$

Also

$$\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}\cdot x$$

$$\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n}$$

Somit gilt:

$$\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n} \le \binom{n+1}{k}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n}$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, dass gilt:

$$\binom{n+1}{k}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n} \le \binom{n+1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!\cdot(n+1)\cdot(n-k)}{(n+1-k)!\cdot k!\cdot(k+1)\cdot n} \le \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\cdot(k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!\cdot(n+1)\cdot(n-k)}{(n-k+1)!\cdot k!\cdot(k+1)\cdot n} \le \frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!\cdot(n+1)\cdot(n-k)}{(n-k)!(n-k+1)\cdot(k+1)!\cdot n} \le \frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(n-k+1)\cdot n} \le \frac{1}{1\cdot 1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(n-k+1)\cdot n} \le 1 \Leftrightarrow (n+1)\cdot(n-k) \le 1\cdot(n-k+1)\cdot n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - nk + n - k \le n^2 - nk + n \Leftrightarrow -k \le 0$$

Wenn $\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} \le \binom{n+1}{k}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n}$ und $\binom{n+1}{k}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n-k)}{(k+1)\cdot n} \le \binom{n+1}{k+1}$ dann gilt auch $\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1} \le \binom{n+1}{k+1}$.

Was zu beweisen war.