39

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Es ist zu beweisen, dass zwischen n und $n!$ stets eine Primzahl liegt.

Lösung:

Illustration

n	n! (Faktoren p)	$n!-1$ (Faktor q)	$n < k_v \leq n!-1$, wobei k_p Primzahlen sind
3	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = 2^1 \cdot 3^1$	$5 = 5^1$	4,5
4	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 2^3 \cdot 3^1$	$23 = 23^1$	5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23

Die Frage, ob $n!$ einen Primfaktor p enthalten kann, für den $p > n$ gilt, ist zu verneinen.

Angenommen $p \mid n!$, dann existiert eine Zahl m, die dazwischen liegt, nämlich $1 \leq m \leq n$, sodass $p \mid m$, woraus $p \leq n$ folgt.

Daraus folgt weiter, dass für alle Primfaktoren von $n!$ gilt $2 \leq p \leq n$.

Es gilt außerdem $ggT(n!, n!-1) = 1$.

Das heißt, alle Primfaktoren q von $n!-1$ müssen größer als n sein.

Alle Primfaktoren q von $n!-1$ haben daher die Eigenschaft $n < q \leq n!-1$.

Somit liefert jeder Primfaktor q von $n!-1$ einen Beweise für die Richtigkeit der Aussage, dass für $n \geq 3$ zwischen n und $n!$ stets eine Primzahl liegt.