48
Es ist zu beweisen, dass eine ungerade natürliche Zahl genau dann eine Primzahl ist, wenn sie nur eine einzige Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen besitzt.

Lösung:
Illustration

n	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
n^2	1		4		9		16		25		36		49		64		81		100
Diff. p		3		5		7				11		13				17		19	
Diff. $c \cdot d$								$1 \cdot 9$						$1 \cdot 15$					

(1) Wenn p Primzahl ist, dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen a und b mit $a^2 - b^2 = p$.

(2) Wenn eindeutig bestimmte Zahlen a und b mit $a^2 - b^2 = p$ existieren, dann ist zu zeigen, dass p Primzahl ist.

zu (1) direkter Beweis
$p = a^2 - b^2 \Rightarrow p = (a-b)\cdot(a+b)$. Da p Primzahl folgt $a - b = 1 \Leftrightarrow a = b+1$ und $a+b = p$.

Daraus folgt $a + b = b + 1 + b = 2b + 1 = p \Rightarrow 2b = p - 1 \Rightarrow b = \frac{p-1}{2}$.

Für a ergibt sich daraus $a = b + 1 = \frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p-1+2}{2} = \frac{p+1}{2}$.

Es ist zu zeigen, dass $a^2 - b^2 = p$ gilt.

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+2p+1}{4} - \frac{p^2-2p+1}{4} = \frac{p^2+2p+1-p^2+2p-1}{4} = \frac{4p}{4} = p.$$

Was zu beweisen war.

zu (2) indirekter Beweis
Unter der Annahme, p sei <u>keine</u> Primzahl, existieren Faktoren c und d mit $1 \le c, d < p$, so dass $p = c \cdot d$ gilt. Außerdem sei $p = a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) = c \cdot d$,
wobei $c = a - b$ und $d = a + b$ gelten soll. Addition dieser Gleichungen ergibt
$c + d = a - b + a + b = 2a$. Daraus ergibt sich $a = \frac{c+d}{2}$ und, eingesetzt in $d = a + b$ ergibt sich daraus $d = a + b = \frac{c+d}{2} + b \Rightarrow b = d - \frac{c+d}{2} = \frac{2d-c-d}{2} = \frac{d-c}{2}$.

Es ist zu zeigen, dass $a^2 - b^2 = c \cdot d$ gilt.

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d-c}{2}\right)^2 = \frac{c^2+2cd+d^2}{4} - \frac{d^2-2cd+c^2}{4} = \frac{c^2+2cd+d^2-d^2+2cd-c^2}{4} = \frac{4cd}{4} = cd.$$

Was zu beweisen war.

Aus (1) und (2) folgt also, dass eine ungerade natürliche Zahl genau dann eine Primzahl ist, wenn sie nur <u>eine einzige Darstellung</u> als Differenz zweier Quadratzahlen besitzt.
Was zu beweisen war.