

Seien  $a, b, c$  von Null verschiedene Zahlen mit  $a^2 + b^2 = c^2$ . Es ist zu beweisen, dass 12 das Produkt  $ab$  und 60 das Produkt  $abc$  teilt.

Lösung:

Illustration

| a  | b  | c  | $a^2 + b^2 = c^2$ | $12 ab = 3 \cdot 4 ab$ | $60 abc = 3 \cdot 4 \cdot 5 abc$ |
|----|----|----|-------------------|------------------------|----------------------------------|
| 3  | 4  | 5  | $9+16=25$         | $3 \cdot 4$            | $3 \cdot 4 \cdot 5$              |
| 6  | 8  | 10 | $36+64=100$       | $6 \cdot 8$            | $6 \cdot 8 \cdot 10$             |
| 8  | 15 | 17 | $64+225=289$      | $8 \cdot 15$           | $8 \cdot 15 \cdot 17$            |
| 11 | 60 | 61 | $121+3600=3721$   | $11 \cdot 60$          | $11 \cdot 60 \cdot 61$           |

Vorüberlegung:  $12 = 3 \cdot 4$  und  $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$

Welche Reste kann eine Quadratzahl  $x^2$  haben bei Division

(Ü1) durch 3:  $x = 3q + r \Leftrightarrow x^2 = 9q^2 + 6qr + r^2 = 3 \cdot (3q^2 + 2qr) + r^2$

$$r = 0 \Rightarrow r^2 = 0$$

$$r = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$

$$r = 2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 1$$

(Ü2) durch 4:  $x = 4q + r \Leftrightarrow x^2 = 16q^2 + 8qr + r^2 = 4 \cdot (4q^2 + 2qr) + r^2$

$$r = 0 \Rightarrow r^2 = 0$$

$$r = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$

$$r = 2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 0$$

$$r = 3 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 1$$

(Ü3) durch 5:  $x = 5q + r \Leftrightarrow x^2 = 25q^2 + 10qr + r^2 = 5 \cdot (5q^2 + 2qr) + r^2$

$$r = 0 \Rightarrow r^2 = 0$$

$$r = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$

$$r = 2 \Rightarrow r^2 = 4$$

$$r = 3 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 4$$

$$r = 4 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r^2 = 1$$

Es gilt  $\mu_n(z) := r \Leftrightarrow z = q \cdot n + r$  für  $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$  und  $r \in \mathbb{N}_0$

Zu zeigen ist:

1. Fall:  $3|ab \Leftrightarrow 3|a \vee 3|b$

Angenommen  $3 \nmid a \wedge 3 \nmid b$ , dann gilt  $\mu_3(a^2) = 1$  und  $\mu_3(b^2) = 1$ .

Das ergäbe  $\mu_3(c^2) = \mu_3(\mu_3(a^2) + \mu_3(b^2)) = \mu_3(2) = 2$ , was (Ü1) widersprechen würde.

Als gilt  $3|a \vee 3|b \Leftrightarrow 3|ab$ .

2. Fall:  $4|ab \Leftrightarrow 4|a \vee 4|b$

Angenommen  $4 \nmid a \wedge 4 \nmid b$ , dann gilt  $\mu_4(a^2) = 1$  und  $\mu_4(b^2) = 1$ .

Das ergäbe  $\mu_4(c^2) = \mu_4(\mu_4(a^2) + \mu_4(b^2)) = \mu_4(2) = 2$ , was (Ü2) widersprechen würde.

Als gilt  $4|a \vee 4|b \Leftrightarrow 4|ab$ .

3. Fall:  $12|ab$

Aus  $3|ab$  und  $4|ab$  folgt  $12|a^2b^2 \Rightarrow 12|ab$ .

4. Fall:  $5|abc \Leftrightarrow 5|a \vee 5|b \vee 5|c$

Angenommen  $5 \nmid a \wedge 5 \nmid b \wedge 5 \nmid c$ , dann würden nach (Ü3) drei Möglichkeiten gelten:

(M1)  $\mu_5(a^2) = 1$  und  $\mu_5(b^2) = 1$

Das ergäbe  $\mu_5(c^2) = \mu_5(\mu_5(a^2) + \mu_5(b^2)) = \mu_5(2) = 2$ , was (Ü3) widersprechen würde.

(M2)  $\mu_5(a^2) = 1$  und  $\mu_5(b^2) = 4$  oder  $\mu_5(a^2) = 4$  und  $\mu_5(b^2) = 1$

Das ergäbe  $\mu_5(c^2) = \mu_5(\mu_5(a^2) + \mu_5(b^2)) = \mu_5(5) = 0$ , was  $5|c$  bedeutete, also der Annahme  $5 \nmid c$  widersprechen würde.

(M3)  $\mu_5(a^2) = 4$  und  $\mu_5(b^2) = 4$

Das ergäbe  $\mu_5(c^2) = \mu_5(\mu_5(a^2) + \mu_5(b^2)) = \mu_5(8) = 3$ , was (Ü3) widersprechen würde.

Also gilt  $5|a \vee 5|b \vee 5|c \Leftrightarrow 5|abc$ .

5. Fall:  $60|abc$

Aus  $12|ab$  und  $5|abc$  folgt  $60|a^2b^2c \Rightarrow 60|abc$ .

Zusammengefasst gilt also  $12|ab$  und  $60|abc$ .

Was zu beweisen war.