57

Seien a, b, c von Null verschiedene natürliche Zahlen, die der Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ genügen. Es ist zu beweisen, dass $21 | abc$.

Lösung:

Es wird davon ausgegangen, dass es sich hier nicht um eine „wenn …, dann“-Beziehung $(\Rightarrow)$, sondern um eine „genau dann, wenn …“-Beziehung $(\Leftrightarrow)$ handelt. Nach den Regeln der Aussagenlogik ist eine solche Beziehung wahr, wenn die Aussagen A1 und A2 entweder beide wahr oder beide falsch sind:

A1	A2	$A1 \Leftrightarrow A2$
wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

Für die Teilmenge $T = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 31\} \subset \mathbb{N}$ lässt sich die Bedingung $a^3 + b^3 = c^3$ für keines der Elemente $a \in T, b \in T, c \in T$ erfüllen. Folglich gilt auch nicht $21 | abc$.

Nimmt man umgekehrt an, es gäbe a, b, c von Null verschiedene natürliche Zahlen mit $21 | abc$, so müsste wegen $21 = 3 \cdot 7$ eine Zahl c existieren, für die $21 \cdot c = 3 \cdot 7 \cdot c$ gilt.

Es müsste also für $a = 3, b = 7$ ein c geben, so dass $3^3 + 7^3 = c^3$ gilt.

$3^3 + 7^3 = 27 + 343 = 370 = 2 \cdot 5 \cdot 37 = c^3$. Das kann aber nicht sein, weil $c = \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 37}$ keine natürliche Zahl ist.

Folglich lässt sich lediglich beweisen, dass beide Bedingungen falsch sein müssen.