58

Es sind alle natürlichen Zahlen a und b zu bestimmen, für die $a^3 + b^3$ eine Primzahl ist. Die Antwort ist zu begründen.

Lösung:

Da eine Primzahl p nur die Teilermenge $T_p = \{1, p\}$ hat, kann weder a^3 noch b^3 eine Primzahl sein. Und weil die kleinste Primzahl p = 2 ist, so muss gelten $a \geq 1, b \geq 1$.

$1^3 + 1^3 = 1 + 1 = 2$, also a = 1 und b = 1 stellen somit eine Lösung dar.

Es ist nun zu zeigen, dass dies die <u>einzig mögliche</u> Lösung ist.

Faktorisieren von $a^3 + b^3$ ergibt:

$$
\begin{array}{l}
\quad (a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 + b^2 - ab \\
\underline{-(a^3 + a^2 b)} \\
\qquad\quad b^3 - a^2 b \\
\qquad \underline{-(b^3 + b^2 a)} \\
\qquad\qquad \underline{-a^2 b - b^2 a} \\
\qquad\quad \underline{-(-a^2 b - b^2 a)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Es gilt somit $(a^3 + b^3) = (a^2 + b^2 - ab) \cdot (a + b)$

Aus $a \geq 1$ und $b \geq 1$ folgt $a + b \geq 1 + 1 = 2$, also muss $a^2 + b^2 - ab = 1$ sein. Das wiederum heißt, dass $a + b = a^3 + b^3 \Leftrightarrow (a^3 - a) + (b^3 - b) = 0$

Also gilt $a^3 - a = 0$ und $b^3 - b = 0$, also $a(a^2 - 1) = 0$ und $b(b^2 - 1) = 0$.

Wegen $a \geq 1$ und $b \geq 1$ folgt $a^2 - 1 = 0$ und $b^2 - 1 = 0$. Hieraus folgt $a^2 = 1$ und $b^2 = 1$, woraus schließlich a = 1 und b = 1 folgt.

Was zu beweisen war.