60

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

Lösung 1:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$

$$1^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

1 = 1 womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n\cdot(n+1))^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^2(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4} =$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Was zu beweisen war.

Lösung 2:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ und

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$$

Da 1=1 gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$

Nun gilt (abspalten):

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

n.z.z.

$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Teilt man nun diese Gleichung durch $(n+1)^2$, so ergibt sich

$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{(n+2)^2}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{n^2+4n+4}{4} \Leftrightarrow n^2+4n+4 = n^2+4n+4 \Leftrightarrow (n+2)^2 = (n+2)^2$

q.e.d.