65

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Lösung 1:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

$1(1+1)(1+2) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = (n+1)(n+2)(n+3)\left[\frac{n}{4}+1\right]$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Was zu beweisen war.

Lösung 2:

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{24}{4} = 6$ und

$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(1+1)(1+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Da 6=6 gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)(n+1+3)}{4}$

Nun gilt (abspalten):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+1+1)(n+1+2) =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

n.z.z.

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

dividiert man die Gleichung durch $\left[(n+1)(n+2)(n+3)\right]$ dann erhält man

$$\frac{n}{4} + 1 = \frac{n+4}{4} \Leftrightarrow \frac{n+4}{4} = \frac{n+4}{4} \Leftrightarrow n+4 = n+4$$

q.e.d.