68

Eine natürliche Zahl n heißt sonderbar, wenn $n < \sigma(n) - n$ gilt und es keine Teilmenge T der echten Teiler von n gibt mit $\sum_{d \in T} d = n$. Es ist zu beweisen:

Seien n sonderbar und $p > \sigma(n)$ eine Primzahl, dann ist np sonderbar.

Lösung:

Definition: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt abundante Zahl, wenn für die Summe ihrer Teiler $\sigma(n)$ gilt $\sigma(n) > 2n$.

Beispiele:

12 ist abundant, denn $\sigma(12) = 28 > 2 \cdot 12 = 24$

70 ist abundant, denn $\sigma(70) = 144 > 2 \cdot 70 = 140$

Es ist zu zeigen:

<u>Erstens:</u> np ist abundant.

Es gilt $\sigma(n)(p) = \sigma(n \cdot p) = \sigma(n) \cdot \sigma(p)$.

Wegen $p > \sigma(n) > n$ folgt $\sigma(n)(1+p) = \sigma(n \cdot (1+p)) = \sigma(n + np) = \sigma(n) + \sigma(np)$.

Aus $\sigma(n) > 2n$ folgt $\sigma(n)(1+p) > 2n(1+p) = 2n + 2np$.

Da $\sigma(n)(1+p) = \sigma(n) + \sigma(np) > 2n + 2np$ und $\sigma(n) > 2n$ folgt daraus $\sigma(np) > 2np$,

d.h. np ist abundant.

<u>Zweitens:</u> Es existiert keine Teilmenge T von $eT_{n \cdot p}$ (= Menge der echten Teiler von np)

mit $\sum_{\nu \in T} \nu = n \cdot p$.

$eT_{n \cdot p} = T_n \cup eT_{n \cdot t}$

mit $T_n = \{d / d \text{ ist Teiler von } n\}$ und $eT_{n \cdot t} = \{t \cdot p / t \text{ ist echter Teiler von } n\}$,

wobei $eT_n = \{t / t \text{ ist echter Teiler von } n\}$

Beispiel:

$T_{70} = \{d / d \text{ ist Teiler von } 70\} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

$eT_{70} = \{t / t \text{ ist echter Teiler von } 70\} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35\}$

$eT_{70 \cdot t} = \{t \cdot 149 / t \text{ ist echter Teiler von } 70\} = \{1 \cdot 149, 2 \cdot 149, 5 \cdot 149, 7 \cdot 149, 10 \cdot 149, 14 \cdot 149, 35 \cdot 149\}$

$= \{149, 298, 745, 1043, 1490, 2086, 5215\}$

$eT_{70 \cdot 149} = T_{70} \cup eT_{70 \cdot t} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\} \cup \{149, 298, 745, 1043, 1490, 2086, 5215\}$

$= \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70, 149, 298, 745, 1043, 1490, 2086, 5215\}$

Die Zahl $70 \cdot 149 = 10430$ ist abundant und sonderbar, was durch Rechnung nachprüfbar ist.

Angenommen np ist nicht sonderbar,

dann existieren Zahlen $d_1, d_2, ..., d_k \in T_n$ und Zahlen $t_1 \cdot p, t_2 \cdot p, ..., t_s \cdot p \in eT_{n \cdot t}$

mit $\sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{j=1}^{s} t_j \cdot p = n \cdot p$. Es gilt $\sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{j=1}^{s} t_j \cdot p = \sum_{i=1}^{k} d_i + p \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) = n \cdot p$.

Daraus folgt $n \cdot p - p \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) = \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Nach den Teilbarkeitsregeln gilt $p \mid n \cdot p \wedge p \,\Big|\, p \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) \Rightarrow p \,\Big|\, n \cdot p - p \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) = \sum_{i=1}^{k} d_i \Rightarrow p \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Es war vorausgesetzt worden $p > \sigma(n) \geq n$, angewandt auf $n \cdot p$ also $p > \sigma(n \cdot p) \geq n \cdot p$ oder anders formuliert $p > \sum_{i=1}^{k} d_i + p \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) \geq n \cdot p$. Da nun gilt $p \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} d_i$, so muss $\sum_{i=1}^{k} d_i = 0$ sein.

Das ergibt dann zusammenfassend $p \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) = n \cdot p \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{s} t_j \right) = n$.

Das ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung n ist sonderbar.

Aus <u>Erstens</u> und <u>Zweitens</u> ist somit der Beweis, dass np sonderbar ist, erbracht.

Was zu beweisen war.