69

Seien $n \geq 2$ und $k \geq 1$ natürliche Zahlen. Es ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen

$$\sum_{t=0}^{k-1} n^t = \sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t} (n-1)^{t-1}$$

Lösung:

Die Gültigkeit der Summenformel für die geometrische Reihe wurde in Aufgabe 11 bewiesen:

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Definiert man k = t, $n = k-1$, a = 1 und q = n, so erhält man

$$\sum_{t=0}^{k-1} 1 \cdot n^t = 1 \cdot \frac{n^{k-1+1}-1}{n-1} \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{k-1} n^t = \frac{n^k-1}{n-1}$$

Der binomische Satz für alle natürlichen Zahlen n und alle reelen Zahlen a und b heißt

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot a^{n-\nu} \cdot b^\nu$$

Definiert man a = 1, $b = n-1$, n = k und $\nu = t$, so wird $(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \cdot a^{n-\nu} \cdot b^\nu$ zu

$$(1+n-1)^k = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} \cdot 1^{k-t} \cdot (n-1)^t \Leftrightarrow n^k = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} (n-1)^t$$

Also

$$\sum_{t=0}^{k-1} n^t = \frac{n^k-1}{n-1} = \frac{\sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} (n-1)^t - 1}{n-1} = \frac{1+\sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t} (n-1)^t - 1}{n-1} = \frac{\sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t} (n-1)^t}{n-1} = \sum_{t=1}^{k} \binom{k}{t} (n-1)^{t-1}.$$

Was zu beweisen war.