74
Es ist zu beweisen, dass die Summe zweier ungerader Quadratzahlen niemals eine Quadratzahl sein kann.

Lösung:
Es sei $a = 2n + 1$ und $b = 2m + 1$ mit $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$.

$a^2 + b^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2$

Wenn $a^2 + b^2$ als natürliche Zahl eine Quadratzahl wäre, so müsste auch $\sqrt{a^2 + b^2}$ eine natürliche Zahl sein.
Das ist jedoch nicht der Fall, denn $\sqrt{4(n^2 + m^2 + n + m) + 2}$ ist keine natürliche Zahl.

Was zu beweisen war.