79

Durch vollständige Induktion $(n \geq 1)$ ist zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k(k+2) = \frac{1}{6}(1+1)((2\cdot 1)+7) = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 9 = \frac{18}{6} = 3$ und $\sum_{k=1}^{1} k(k+2) = 1\cdot(1+2) = 1\cdot 3 = 3$

Da 3=3 gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+2) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2(n+1)+7) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+9)$

Nun gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+2) + (n+1)(n+3)$

Es ist noch zu zeigen: $\frac{n}{6}(n+1)(2n+7) + (n+1)(n+3) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+9)$

$$\frac{n}{6}(n+1)(2n+7) + (n+1)(n+3) = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+9) \Leftrightarrow \frac{n}{6}(2n+7) + n + 3 = \frac{1}{6}(n+2)(2n+9) \Leftrightarrow$$
$$n(2n+7) + 6n + 18 = (n+2)(2n+9) \Leftrightarrow 2n^2 + 13n + 18 = 2n^2 + 13n + 18$$

Was zu beweisen war.