80

Durch vollständige Induktion ist für $(n \geq 1)$ zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(1+k^2\right)=\frac{1}{4}n(n+1)\left(2+n+n^2\right)$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k\left(1+k^2\right)=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 2\cdot 4=\frac{8}{4}=2$ und $\sum_{k=1}^{1} k\left(1+k^2\right)=1\cdot(1+1^2)=1\cdot 2=2$

Da 2=2 gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k\left(1+k^2\right)=\frac{1}{4}n(n+1)\left(2+n+n^2\right)$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k(1+k^2)=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)\left(2+n+1+(n+1)^2\right)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\left(1+k^2\right)=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)\left(2+n+1+(n+1)^2\right)=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)\left(2+n+1+n^2+2n+1\right)=$$
$$\frac{1}{4}(n+1)(n+2)\left(n^2+3n+4\right)$$

Nun gilt (abspalten): $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(1+k^2\right)=\sum_{k=1}^{n} k\left(1+k^2\right)+(n+1)\left(1+(n+1)^2\right)$

Es ist noch zu zeigen:

$$\frac{1}{4}n(n+1)\left(2+n+n^2\right)+(n+1)\left(1+(n+1)^2\right)=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)\left(n^2+3n+4\right)\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}n\left(2+n+n^2\right)+\left(n^2+2n+2\right)=\frac{1}{4}(n+2)\left(n^2+3n+4\right)\Leftrightarrow$$
$$n\left(2+n+n^2\right)+4\left(n^2+2n+2\right)=(n+2)\left(n^2+3n+4\right)\Leftrightarrow$$
$$2n+n^2+n^3+4n^2+8n+8=n^3+3n^2+4n+2n^2+6n+8\Leftrightarrow$$
$$n^3+5n^2+10n+8=n^3+5n^2+10n+8$$

Was zu beweisen war.