84

Durch vollständige Induktion $(n \geq 1)$ ist zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(4k^2-1\right)} = \frac{n}{2n+1}$$

Lösung

A(1): $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\left(4k^2-1\right)} = \frac{1}{\left(\left(2\cdot 1\right)+1\right)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ und $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\left(4\cdot k^2-1\right)} = \frac{1}{4\cdot 1^2-1} = \frac{1}{3}$

Da $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(4k^2-1\right)} = \frac{n}{2n+1}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\left(4k^2-1\right)} = \frac{n+1}{2\left(n+1\right)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

Nun gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\left(4k^2-1\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(4k^2-1\right)} + \frac{1}{\left(4\left(n+1\right)^2-1\right)}$

Es ist noch zu zeigen:

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\left(4\left(n+1\right)^2-1\right)} = \frac{n+1}{2n+3} \Leftrightarrow \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\left(2^2\left(n+1\right)^2-1\right)} = \frac{n+1}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\left(\left(2\left(n+1\right)\right)^2-1\right)} = \frac{n+1}{2n+3} \Leftrightarrow \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\left(2\left(n+1\right)+1\right)\left(2\left(n+1\right)-1\right)} = \frac{n+1}{2n+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{\left(2n+3\right)\left(2n+1\right)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Wenn man jetzt die Gleichung mit dem Hauptnenner $\left(2n+3\right)\left(2n+1\right)$ multipliziert, dann bekommt man

$$n(2n+3)+1 = (n+1)(2n+1) \Leftrightarrow 2n^2+3n+1 = 2n^2+n+2n+1 \Leftrightarrow$$

$$2n^2+3n+1 = 2n^2+3n+1$$

Was zu beweisen war.