

Durch vollständige Induktion ($n \geq 1$) ist zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

Lösung:

$$A(1): \sum_{k=1}^1 \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{3((4 \cdot 1)+3)} = \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{21} \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{(4 \cdot 1 - 1)(4 \cdot 1 + 3)} = \frac{1}{(4-1)(4+3)} = \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{1}{21}$$

Da $\frac{1}{21} = \frac{1}{21}$ gilt der Induktionsanfang.

$$A(n): \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

$$A(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{n+1}{3(4(n+1)+3)}$$

$$\text{Nun gilt: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} + \frac{1}{(4(n+1)-1)(4(n+1)+3)}$$

Es ist noch zu zeigen:

$$\frac{n}{3(4n+3)} + \frac{1}{(4(n+1)-1)(4(n+1)+3)} = \frac{n+1}{3(4(n+1)+3)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{3(4n+3)} + \frac{1}{(4n+3)(4n+7)} = \frac{n+1}{3(4n+7)}$$

Wenn man jetzt die Gleichung mit dem Hauptnenner $3(4n+3)(4n+7)$ multipliziert, dann bekommt man

$$n(4n+7)+3 = (n+1)(4n+3) \Leftrightarrow 4n^2 + 7n + 3 = 4n^2 + 3n + 4n + 3 \Leftrightarrow$$

$$4n^2 + 7n + 3 = 4n^2 + 7n + 3$$

Was zu beweisen war.