Durch vollständige Induktion $(n \geq 1)$ und $p_0 := 0, p_1, ..., p_n$ ist zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{t=0}^{k-1} (1-p_t) \cdot p_k = 1 - \prod_{t=0}^{n} (1-p_t)$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} \prod_{t=0}^{1-1} (1-p_t) \cdot p_k = 1 - \prod_{t=0}^{1} (1-p_t) = 1 - \left((1-p_0)\cdot(1-p_1)\right) = 1 - 1 + p_1 = p_1$ und

$$\sum_{k=1}^{1} \prod_{t=0}^{1-1} (1-p_t) \cdot p_k = (1-p_0)\cdot p_1 = p_1$$

Da $p_1 = p_1$ gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} \prod_{t=0}^{k-1} (1-p_t) \cdot p_k = 1 - \prod_{t=0}^{n} (1-p_t)$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{t=0}^{k-1} (1-p_t) \cdot p_k = 1 - \prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t)$

Nun gilt: $\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{t=0}^{k-1} (1-p_t) \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} \prod_{t=0}^{k-1} (1-p_t) \cdot p_k + \prod_{t=0}^{n+1-1} (1-p_t) \cdot p_{n+1}$

Es ist noch zu zeigen:

$1 - \prod_{t=0}^{n} (1-p_t) + \prod_{t=0}^{n} (1-p_t) \cdot p_{n+1} = 1 - \prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t) \; |-1 \; \Leftrightarrow$

$-\prod_{t=0}^{n} (1-p_t) + \prod_{t=0}^{n} (1-p_t) \cdot p_{n+1} = -\prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t) \; |\cdot(-1) \Leftrightarrow$

$\prod_{t=0}^{n} (1-p_t) - \prod_{t=0}^{n} (1-p_t) \cdot p_{n+1} = \prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t)$ | ausklammern von: $\prod_{t=0}^{n} (1-p_t) \Leftrightarrow$

$\prod_{t=0}^{n} (1-p_t) \cdot (1-p_{n+1}) = \prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t)$ | das Produkt $\prod_{t=0}^{n} (1-p_t)$ läuft wegen $\cdot(1-p_{n+1})$ bis (n+1)

$\Leftrightarrow \prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t) = \prod_{t=0}^{n+1} (1-p_t)$

Was zu beweisen war.