Für alle $k \leq n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung durch vollständige Induktion zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Hinweis: Der Beweis stützt sich auf Aufgabe 22; vgl. auch Aufgabe 33!

Lösung:

$$A(1): \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1 = 2 \text{ womit der Induktionsanfang gilt.}$$

$$A(n): \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \Leftrightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$A(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} \Leftrightarrow \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}$$

Wie in Aufgabe 22 bewiesen gilt:

$$\binom{n+1}{x} = \binom{n}{x} + \binom{n}{x-1}$$

Folglich ist zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) = 2^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k-1} + \binom{n}{(n+1)-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + 0 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k-1} + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{0-1} + \binom{n}{1-1} + \binom{n}{2-1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + 0 + \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Was zu beweisen war.