01

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ sowie $1 \leq k \leq n$ und alle nicht-negativen reellen Zahlen $a_k$ ist die Gültigkeit folgender Ungleichung zu beweisen.

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Lösung:

A(1): $\prod_{k=1}^{1}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{1} a_k \Leftrightarrow 1+a_1 \geq 1+a_1$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k \Leftrightarrow (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$

A(n+1):

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k \Leftrightarrow (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}$$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \geq (1+\sum_{k=1}^{n} a_k)\cdot(1+a_{n+1})$$

$$(1+\sum_{k=1}^{n} a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} + a_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0$$

Wenn $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \geq (1+\sum_{k=1}^{n} a_k)\cdot(1+a_{n+1})$ und $(1+\sum_{k=1}^{n} a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$

dann gilt auch $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\cdot(1+a_{n+1}) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k$

Was zu beweisen war.