

09

Sei a eine beliebige reelle Zahl. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist zu beweisen, dass die folgende Ungleichung gilt.

$$a^{2^n} > (a+1)^n \cdot (a-1)^n$$

Lösung:

A(1): $a^{2^1} > (a+1)^1 \cdot (a-1)^1 \Leftrightarrow a^2 > (a+1) \cdot (a-1) \Leftrightarrow a^2 > a^2 - 1$ womit der Induktionsanfang gilt.

$$A(n): a^{2^n} > (a+1)^n \cdot (a-1)^n$$

$$A(n+1): a^{2^{(n+1)}} > (a+1)^{n+1} \cdot (a-1)^{n+1}$$

$$a^{2^{(n+1)}} = a^{2n+2} = a^{2n} \cdot a^2$$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$a^{2n} \cdot a^2 > (a+1)^{n+1} \cdot (a-1)^{n+1}$$

$$a^{2n} > (a+1)^n \cdot (a-1)^n$$

$$\Leftrightarrow a^{2n} \cdot a^2 > (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot a^2$$

$$(a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot a^2 > (a+1)^{n+1} \cdot (a-1)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot a^2 > (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot (a+1) \cdot (a-1)$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot a^2 > (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot (a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 > a^2 - 1$$

Wenn $a^{2n} \cdot a^2 > (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot a^2$ und $(a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot a^2 > (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot (a^2 - 1)$

dann gilt auch $a^{2n} \cdot a^2 > (a+1)^n \cdot (a-1)^n \cdot (a^2 - 1) \Leftrightarrow a^{2(n+1)} > (a+1)^{n+1} \cdot (a-1)^{n+1}$

Was zu beweisen war.