10

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ und für alle reellen Zahlen a und q die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^{n} a + kq = \frac{n+1}{2}\left(2a + nq\right)$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=0}^{1} a + kq = \frac{1+1}{2}\left(2a + 1q\right)$

$a + 0q + a + 1q = 2a + 1q$

$2a + q = 2a + q$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=0}^{n} a + kq = \frac{n+1}{2}\left(2a + nq\right)$

A(n+1): $\sum_{k=0}^{n+1} a + kq = \frac{n+1+1}{2}\left(2a + (n+1)q\right) = \frac{n+2}{2}\left(2a + nq + q\right)$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} a + kq = \sum_{k=0}^{n} a + kq + (a + (n+1)q) = \frac{n+2}{2}\left(2a + nq + q\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} a + kq = \frac{n+1}{2}\left(2a + nq\right) + (a + (n+1)q) = \frac{n+1}{2}\left(2a + nq\right) + (a + nq + q) = \frac{n+1}{2}\left(2a + nq\right) + \frac{2}{2}(a + nq + q)$$

$$\frac{(n+1)(2a+nq) + 2(a+nq+q)}{2} = \frac{(n+1)(2a+nq) + 2a + 2nq + 2q)}{2} = \frac{(n+1)(2a+nq) + 2a + nq + nq + 2q)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2a+nq) + 1\cdot(2a+nq) + q(n+2)}{2} = \frac{(2a+nq)\left[n+1+1\right] + q(n+2)}{2} = \frac{(2a+nq)(n+2) + q(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(2a+nq+q)}{2} = \frac{n+2}{2}\left(2a + nq + q\right)$$

Was zu beweisen war.