12

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ zu beweisen.

$n^3 + 2n$ ist stets durch 3 teilbar.

Lösung:

A(1): $3 \mid 1^3 + 2 \cdot 1$

$3 \mid 3$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $3 \mid n^3 + 2n$

A(n+1):

$3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1) = 3 \mid (n+1)(n+1)^2 + 2(n+1) = 3 \mid (n+1)(n^2 + 2n + 1) + 2(n+1)$

$= 3 \mid n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 = 3 \mid n^3 + 3n^2 + 5n + 3$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ durch „Abspalten“ umzuformen:

$n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + 2n + x$

$x = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 - n^3 - 2n = 3n^2 + 3n + 3$

Also gilt

$n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + 2n + x = n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $3 \mid n^3 + 2n$ und offensichtlich gilt auch $3 \mid 3(n^2 + n + 1)$.

Was zu beweisen war.