13

Durch vollständige Induktion ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ zu beweisen.

$3^n - 3$ ist stets durch 6 teilbar.

Lösung:

A(1): $6 | 3^1 - 3 = 6 | 0$

A(2): $6 | 3^2 - 3 = 6 | 9 - 3 = 6 | 6$

womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $6 | 3^n - 3$

A(n+1): $6 | 3^{n+1} - 3$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $3^{n+1} - 3$ durch „Abspalten" umzuformen:

$3^{n+1} - 3 = 3^n - 3 + x$

$x = 3^{n+1} - 3 - 3^n + 3 = 3^{n+1} - 3^n$

Also gilt

$3^{n+1} - 3 = 3^n - 3 + x = 3^n - 3 + 3^{n+1} - 3^n = 3^n - 3 + 3 \cdot 3^n - 3^n = 3^n - 3 + 3^n(3-1) = 3^n - 3 + 2 \cdot 3^n$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $6 | 3^n - 3$.

Da $3 | 2 \cdot 3^n$ und $2 | 2 \cdot 3^n$ gilt, folgt $2 \cdot 3 | 2 \cdot 3^n = 6 | 2 \cdot 3^n$.

Was zu beweisen war.