15

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n}(-3k+1) = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot n^2$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1}(-3k+1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot 1^2$

$$-3\cdot 1 + 1 = -\frac{4}{2}$$

$-2 = -2$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n}(-3k+1) = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot n^2$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1}(-3k+1) = -\frac{n+1}{2} - \frac{3}{2}\cdot (n+1)^2$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(-3k+1) + (-3(n+1)+1) = -\frac{n+1}{2} - \frac{3}{2}\cdot (n+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-3k+1) = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot n^2 + (-3(n+1)+1) = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot n^2 - 3n - 3 + 1 = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot n^2 - 3\cdot(n+1) + 1$$

$$= -\frac{n}{2} - \frac{3n^2}{2} - \frac{3\cdot 2\cdot(n+1)}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\left(n^2 + 2\cdot(n+1)\right) + \frac{2}{2} = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\left(n^2 + 2n + 2\right) + \frac{2}{2}$$

$$= -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\left((n^2 + 2n + 1) + 1\right) + \frac{2}{2} = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\left((n+1)^2 + 1\right) + \frac{2}{2} = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot(n+1)^2 - \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{2}{2}$$

$$= -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot(n+1)^2 - \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot(n+1)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot(n+1)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(n+1) - \frac{3}{2}\cdot(n+1)^2 = -\frac{n+1}{2} - \frac{3}{2}\cdot(n+1)^2$$

Was zu beweisen war.