18

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle reellen Zahlen a ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot 3^k = 2^{n-1} \cdot \left(3^{n+1} - 1\right)$$

Lösung 1:

$\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot 3^k = 2^{n-1} \cdot \left(3^{n+1} - 1\right)$ ergibt durch Umformung $2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^k = 2^{n-1} \cdot \left(3^{n+1} - 1\right)$

A(1): $2^1 \cdot \sum_{k=0}^{1} 3^k = 2^{1-1} \cdot \left(3^{1+1} - 1\right)$

$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = 2^0 \left(3^2 - 1\right)$

$2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 1(9 - 1)$

8 = 8 womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^k = 2^{n-1} \cdot \left(3^{n+1} - 1\right)$

A(n+1): $2^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 2^{n+1-1} \cdot \left(3^{n+1+1} - 1\right) = 2^n \cdot \left(3^{n+2} - 1\right)$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$2^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 2 \cdot 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 2 \cdot 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^k + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 2^n \cdot \left(3^{n+2} - 1\right)$$

$$2 \cdot 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 2\left(2^{n-1} \cdot \left(3^{n+1} - 1\right)\right) + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 2^{1+n-1}\left(3^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1}$$

$$= 2^n \cdot 3^{n+1} - 2^n + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 3^{n+1}\left(2^n + 2^{n+1}\right) - 2^n = 3^{n+1}\left(2^n + 2 \cdot 2^n\right) - 2^n = 2^n \cdot 3^{n+1}(1+2) - 2^n$$

$$= 2^n \cdot 3^{n+1} \cdot 3 - 2^n = 2^n\left(3^{n+1} \cdot 3 - 1\right) = 2^n \cdot \left(3^{n+2} - 1\right)$$

Was zu beweisen war.

Lösung 2:

Durch vollständige Induktion $(n \geq 1)$ ist zu beweisen:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot 3^k = 2^{n-1}\left(3^{n+1} - 1\right)$$

Durch Umformung ist es uns gestattet $\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot 3^k = 2^{n-1}\left(3^{n+1} - 1\right)$ als $2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^k = 2^{n-1}\left(3^{n+1} - 1\right)$ zu schreiben.

A(1): $2^1 \cdot \sum_{k=0}^{1} 3^k = 2^{1-1}\left(3^{1+1} - 1\right) = 2^0\left(3^2 - 1\right) = 9 - 1 = 8$ und

$2^1 \cdot \sum_{k=0}^{1} 3^k = 2\left(3^0 + 3^1\right) = 2(1+3) = 2 \cdot 4 = 8$

A(n): $2^{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^{k} = 2^{n-1}\left(3^{n+1}-1\right)$

A(n+1): $2^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^{k} = 2^{n+1-1}\left(3^{n+1+1}-1\right) = 2^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^{k} = 2^{n}\left(3^{n+2}-1\right)$

Nun gilt:

$$2^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 3^{k} = 2^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} 3^{k} + 3^{n+1}\right) = 2 \cdot 2^{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^{k} + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1}\left(3^{n+1}-1\right) + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1}$$

n.z.z.

$$2 \cdot 2^{n-1}\left(3^{n+1}-1\right) + 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 2^{n}\left(3^{n+2}-1\right) \Leftrightarrow 2^{n}\left(3^{n+1}-1\right) + 2 \cdot 2^{n} \cdot 3^{n+1} = 2^{n}\left(3^{n+2}-1\right) \Leftrightarrow$$

$$2^{n}\left(\left(3^{n+1}-1\right) + 2 \cdot 3^{n+1}\right) = 2^{n}\left(3^{n+2}-1\right) \Leftrightarrow 3^{n+1}-1+2 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+2}-1 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{n+1}-1 = 3^{n+2}-1 \Leftrightarrow$$

$$3^{n+2}-1 = 3^{n+2}-1$$

q.e.d.