19

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle reellen Zahlen a ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$2^{n+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a = a$$

Lösung 1:

$2^{n+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a = a$ ergibt durch Umformung $a \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} \cdot a - a = a\left(2^{n+1} - 1\right)$

A(1): $a \cdot \sum_{k=0}^{1} 2^k = a\left(2^{1+1} - 1\right)$

$a \cdot 2^0 + a \cdot 2^1 = a\left(2^2 - 1\right)$

$a \cdot 1 + a \cdot 2 = a(4-1)$

3a = 3a womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $a \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^k = a\left(2^{n+1} - 1\right)$

A(n+1): $a \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = a\left(2^{n+1+1} - 1\right) = a\left(2^{n+2} - 1\right)$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$a \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^k + a \cdot 2^{n+1} = a\left(2^{n+2} - 1\right)$$

$$a \cdot \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = a\left(2^{n+1} - 1\right) + a \cdot 2^{n+1} = a \cdot 2^{n+1} - a + a \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot a \cdot 2^{n+1} - a = a\left(2 \cdot 2^{n+1} - 1\right) = a\left(2^{n+2} - 1\right)$$

Was zu beweisen war.

Lösung 2:

Durch vollständige Induktion $(n \geq 1)$ ist zu beweisen:

$$2^{n+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a = a$$

A(1):

$$2^{1+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{1} 2^k \cdot a = a$$

$$2^2 \cdot a - \left(2^0 + 2^1\right) \cdot a = 4a - 3a = a$$

Da $a = a$ gilt der Induktionsanfang.

A(n): $2^{n+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a = a$

A(n+1): $2^{n+2} \cdot a - \sum_{k=0}^{n+1} 2^k \cdot a = a$

Nun gilt:

$$2^{n+2} \cdot a - \sum_{k=0}^{n+1} 2^k \cdot a = 2^{n+2} \cdot a - \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a + 2^{n+1} \cdot a \right) = 2 \cdot 2^{n+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a - 2^{n+1} \cdot a =$$

$$2^{n+1} \cdot a (2-1) - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a = 2^{n+1} \cdot a - \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot a = a \Leftrightarrow a = a$$

n.z.z.

$$a = a$$

q.e.d.