25

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Teilbarkeitsaussage zu beweisen.

$9 \mid 4^n + 15n - 1$

Lösung:

A(1): $9 \mid 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 9 \mid 18$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $9 \mid 4^n + 15n - 1$

A(n+1): $9 \mid 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9 \mid 4^{n+1} + 15n + 15 - 1$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $4^{n+1} + 15n + 15 - 1$ durch „Abspalten“ umzuformen:

$4^{n+1} + 15n + 15 - 1 = 4^n + 15n - 1 + x$

$x = 4^{n+1} + 15n + 15 - 1 - 4^n - 15n + 1 = 4^{n+1} - 4^n + 15 = 4 \cdot 4^n - 4^n + 15 = 4^n(4-1) + 15 = 3 \cdot 4^n + 15$

Also gilt

$4^{n+1} + 15n + 15 - 1 = 4^n + 15n - 1 + x = 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot 4^n + 15$

$4^{n+1} + 15n + 15 - 1 = 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot 4^n + 15$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Es ist also noch zu zeigen, dass $9 \mid 3 \cdot 4^n + 15$ gilt.

Es ist offensichtlich, dass $3 \mid 3 \cdot 4^n + 15 = 3 \mid 3 \cdot (4^n + 5)$ gilt.

Es ist jetzt nur noch zu beweisen, dass $3 \mid 4^n + 5$ gilt, denn

wenn $3 \mid 3 \cdot 4^n + 15$ und $3 \mid 4^n + 5$ gilt, dann gilt auch $3 \cdot 3 \mid 3 \cdot 4^n + 15 = 9 \mid 3 \cdot 4^n + 15$.

B(1): $3 \mid 4^1 + 5 = 3 \mid 9$ womit der Induktionsanfang gilt.

B(n): $3 \mid 4^n + 5$

B(n+1): $3 \mid 4^{n+1} + 5$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $4^{n+1} + 5$ durch „Abspalten“ umzuformen:

$4^{n+1} + 5 = 4^n + 5 + y$

$y = 4^{n+1} + 5 - 4^n - 5 = 4^{n+1} - 4^n = 4 \cdot 4^n - 4^n = 4^n(4-1) = 3 \cdot 4^n$

Also gilt

$4^{n+1} + 5 = 4^n + 5 + y = 4^n + 5 + 3 \cdot 4^n$

$4^{n+1} + 5 = 4^n + 5 + 3 \cdot 4^n$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $3 \mid 4^n + 5$ und es ist offensichtlich dass auch $3 \mid 3 \cdot 4^n$ gilt.

Womit also $9 \mid 3 \cdot 4^n + 15$ gilt.

Was zu beweisen war.