35

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit fogender Aussage zu beweisen.
$2 \cdot 4^{n-1} + 1$ ist durch 3 teilbar.

Lösung:

A(1): $3 \mid 2 \cdot 4^{1-1} + 1 = 3 \mid 2 \cdot 4^{0} + 1 = 3 \mid 2 \cdot 1 + 1 = 3 \mid 3$ womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $3 \mid 2 \cdot 4^{n-1} + 1$

A(n+1): $3 \mid 2 \cdot 4^{n+1-1} + 1 = 3 \mid 2 \cdot 4^{n} + 1$

Folgende Hilfsüberlegung gestattet es $2 \cdot 4^{n} + 1$ durch „Abspalten“ umzuformen:
$2 \cdot 4^{n} + 1 = 2 \cdot 4^{n-1} + 1 + x$

$$x = 2 \cdot 4^{n} + 1 - 2 \cdot 4^{n-1} - 1 = 2 \cdot 4^{n} - 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot (4^{n} - 4^{n-1}) = 2 \cdot (4 \cdot 4^{n-1} - 4^{n-1}) = 2 \cdot 4^{n-1}(4-1) = 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$$

Also gilt
$2 \cdot 4^{n} + 1 = 2 \cdot 4^{n-1} + 1 + x = 2 \cdot 4^{n-1} + 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} + 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $3 \mid 2 \cdot 4^{n-1} + 1$, außerdem gilt offensichtlich $3 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$.

Was zu beweisen war.