38

Es sind alle natürlichen Zahlen $n \geq 1, k \geq 1$ zu bestimmen, die die Gleichung $n! = n^k$ erfüllen.

Lösung:

Zunächst soll der Hilfssatz $ggT(t, t-1) = 1$ bewiesen werden.
Sei $ggT(t, t-1) = d$ und $d \cdot x = t$ und $d \cdot y = t-1$, so folgt daraus
$d \cdot x - d \cdot y = t - (t-1) = 1 \Rightarrow d(x-y) = 1$. Da nach den Teilbarkeitsregeln 1 Teiler jeder Zahl ist, also $1 | t \wedge 1 | t-1 \Rightarrow 1 | t-(t-1)$, ist auch $d(x-y) = 1 \Rightarrow d = 1$ zu folgern erlaubt.

$1! = 1^k = 1$; alle Paare (1,k) mit $k \in \mathbb{N}$ sind Lösungen dieser Gleichung.
$2! = 2^1 = 2$; das Paar (2,1) ist ebenfalls eine Lösung.
$3! = 6 \neq 3^1 = 3$. Es ist zu vermuten, dass es keine Lösungen mehr für $n \geq 3$ gibt.

$n! = n^k \Rightarrow (n-1)! = n^{k-1}$.
Es gilt $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t} \Rightarrow n^k = p_1^{k \cdot \alpha_1} \cdot p_2^{k \cdot \alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{k \cdot \alpha_t}$.
$(n-1)! = (n-2)! \cdot (n-1)$.
Es gilt $(n-2)! = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}$ und $(n-1) = r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot r_v^{\gamma_v}$ woraus folgt
$(n-2)! \cdot (n-1) = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s} \cdot r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot r_v^{\gamma_v}$.
Da jedoch nach obigem Hilfssatz n und $(n-1)$ teilerfremd sind, kann keiner der Primfaktoren $r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot r_v^{\gamma_v}$ unter den Primfaktoren $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$ enthalten sein.
Daraus folgt $n-1 = 1 \Rightarrow n = 2$.

Was zu beweisen war.

Die Gleichung $n! = n^k$ wird also nur durch die Zahlenpaare (1,k) und (2,1) erfüllt.