

Seien $a \geq b \geq 1$ teilerfremde natürliche Zahlen. Es ist zu beweisen, dass die Annahme, dass $a^2 - b^2$ eine Quadratzahl ist, impliziert, dass $a + b$ und $a - b$ beides Quadratzahlen oder das Doppelte von Quadratzahlen sind.

Lösung:

Illustration

a	b	$a^2 - b^2$	$a + b$	$a - b$
17	15	8^2	$2 \cdot 4^2$	$2 \cdot 1^2$
61	11	60^2	$2 \cdot 6^2$	$2 \cdot 5^2$
5	4	3^2	3^2	1^2
13	12	5^2	5^2	1^2

Es gilt laut Voraussetzung: $a^2 - b^2 = c^2$ und $\text{ggT}(a, b) = 1$.

Zu bestimmen ist $\text{ggT}(a + b, a - b)$.

Seien $d \cdot x = a + b$ und $d \cdot y = a - b$.

Daraus folgt $dx + dy = a + b + a - b = 2a$ und $dx - dy = a + b - (a - b) = a + b - a + b = 2b$.

Nun gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $(a + b)$ und $(a - b)$ sind gerade Zahlen.

2. Fall: $(a + b)$ und $(a - b)$ sind **ungerade** Zahlen.

zum 1. Fall:

$$dx + dy = d(x + y) = 2a \Leftrightarrow \frac{d}{2}(x + y) = a \text{ und } dx - dy = d(x - y) = 2b \Leftrightarrow \frac{d}{2}(x - y) = b.$$

Das bedeutet, $\frac{d}{2}$ ist ein gemeinsamer Teiler von a und b , also $\text{ggT}(a, b) = \frac{d}{2}$.

Wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$ folgt daraus $\frac{d}{2} = 1 \Leftrightarrow d = 2$.

zum 2. Fall:

Das heißt, es gibt ein $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$ und ein $\frac{x-y}{2} \in \mathbb{N}$.

Also gilt $d \cdot \frac{x+y}{2} = a$ und $d \cdot \frac{x-y}{2} = b$.

Das bedeutet, d ist ein gemeinsamer Teiler von a und b , also $\text{ggT}(a, b) = d$.

Wegen $\text{ggT}(a, b) = 1$ folgt daraus $d = 1$.

Wir haben somit zwei Möglichkeiten für $\text{ggT}(a + b, a - b)$ zu unterscheiden:

1. Möglichkeit: $e = \text{ggT}(a + b, a - b) = 1$

2. Möglichkeit: $e = \text{ggT}(a + b, a - b) = 2$

zur 1. Möglichkeit:

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Nach dem Satz der eindeutigen Primfaktorenzerlegung

ist $c = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t} \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{2\alpha_t}$.

Weiter seien $(a + b) = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}$ und $(a - b) = r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot r_v^{\gamma_v}$.

Zusammenfassend folgt also

$$c^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{2\alpha_t} = (a + b) \cdot (a - b) = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s} \cdot r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot r_v^{\gamma_v}.$$

zur 2. Möglichkeit:

$$e = \text{ggT}(a + b, a - b) = 2$$

$$a^2 - b^2 = c^2 = (a + b)(a - b) \Rightarrow \frac{c^2}{4} = \frac{a + b}{2} \cdot \frac{a - b}{2} \Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a + b}{2} \cdot \frac{a - b}{2} \text{ und es folgt daraus}$$

$$\text{ggT}\left(\frac{a + b}{2}, \frac{a - b}{2}\right) = 1.$$

Das jedoch ist die Situation des 1. Falles.

Also existieren natürliche Zahlen g und h mit $\frac{a + b}{2} = g^2$ und $\frac{a - b}{2} = h^2$. Woraus wiederum

folgt $a + b = 2g^2$ und $a - b = 2h^2$.

Was zu beweisen war.