41

Seien $a \geq 1, b \geq 1, k \geq 1$ und $m \geq 1$ natürliche Zahlen, für die $a^k = b^m$ und $ggT(k,m) = 1$ gilt.

Es ist zu beweisen, dass eine natürliche Zahl n existiert, so dass $a = n^m$ und $b = n^k$ gilt.

Lösung:

Sei $k \cdot x + m \cdot y = 1$. Daraus folgt $a^{k \cdot x + m \cdot y} = a^1 = a = a^{kx} \cdot a^{my} = a^{my} \cdot a^{kx}$. Weil $a^k = b^m$ gilt, folgt $a = a^{my} \cdot a^{kx} = a^{my} \cdot b^{mx} = (a^y \cdot b^x)^m$.

Setztz man $n = a^y \cdot b^x$ so folgt daraus $n^m = a$ und $(n^m)^k = a^k = b^m$.

Da $(n^m)^k = n^{m \cdot k} = n^{k \cdot m} = (n^k)^m = b^m$ folgt daraus $n^k = b$.

Doch es ist noch zu zweigen, dass $a^y \cdot b^x \in \mathbb{N}$.

Angenommen $a^y \cdot b^x \neg \in \mathbb{N}$,

dann existierten teilerfremde natürliche Zahlen $s \neq t$, also $ggT(s,t) = 1$, mit $a^y \cdot b^x = \frac{s}{t}$.

Es würde folgen $(a^y \cdot b^x)^m = n^m = a = \frac{s^m}{t^m}$. Das hieße $\frac{s^m}{t^m}$ wäre eine natürliche Zahl,

was aber wegen $ggT(s,t) = 1$ unmöglich ist. Somit ist bewiesen, dass $a^y \cdot b^x \in \mathbb{N}$.

Womit die Existenz von $a = n^m$ und $b = n^k$ bewiesen ist.

Was zu beweisen war.