42

Es sind alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ zu bestimmen, für die n! eine Quadratzahl ist. Ohne Beweis darf der „Satz von Erdös“ benutzt werden, demzufolge für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ zwischen n und $2n$ stets eine Primzahl liegt.

Lösung:
Offensichtlich gilt die Behauptung für n = 0, weil $0! = 1 = 1^2$ ist, und für n = 1, denn $1! = 1 = 1^2$.

Nach der kanonischen Primfaktorzerlegung sei $n! = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$.
Angenommen es würde $n! = x^2$ gelten, dann müssten alle Exponenten α_k für $1 \leq k \leq t$ gerade Zahlen sein.

Mit Hilfe des „Satzes von Erdös“ soll nun bewiesen werden, dass $\alpha_t = 1$ ist, woraus für $n \geq 2$ folgt, dass $n!$ keine Quadratzahl sein kann.

<u>1. Fall:</u> n ist eine gerade Zahl.
Weil $p_t \leq n$ und für $p_t = n$ offenbar $\alpha_t = 1$ ist, darf angenommen werden $p_t < n$. Nach dem „Satz von Erdös“ folgt $\frac{n}{2} < p_t < n$ und es exstiert eine Primzahl q mit $\frac{n}{2} < q < n$. Da p_t die größte Primzahl ist, die in $n! = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$ vorkommt, gilt $q \leq p_t \Rightarrow \frac{n}{2} < q \leq p_t < n$.
Angenommen es gilt $\alpha_t \geq 2$, also $\alpha_t \neq 1$, dann existiert ein m mit $\frac{m}{2} < p_t < m < n$, wobei $p_t \mid m$ und $\frac{m}{p_t} \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt $\frac{m}{p_t} \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 2 \cdot p_t > 2 \cdot \frac{n}{2} = n$. Die Annahme $\alpha_t \geq 2$ führt also zu einem Widerspruch, woraus folgt, dass $\alpha_t = 1$ sein muss.

<u>2. Fall:</u> n ist eine ungerade Zahl.
Dann gibt es ein $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$, was nach dem „Satz von Erdös“ $\frac{n-1}{2} < p_t \leq n-1 < n$ ergibt, oder, umgeformt, indem allgemein 1 addiert wird, $\frac{n-1}{2} + 1 < p_t + 1 \leq n < n+1$.
Angenommen es gilt $\alpha_t \geq 2$, dann existiert ein m mit mit $\frac{n-1}{2} < p_t < m < n$ wobei $p_t + 1 \mid m$ und $\frac{m}{p_t + 1} \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt
$\frac{m}{p_t + 1} \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 2 \cdot (p_t + 1) = 2 \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{n-1+2}{2}\right) = n+1$. Die Annahme $\alpha_t \geq 2$ führt also auch in diesem Fall zu einem Widerspruch, woraus folgt, dass $\alpha_t = 1$ sein muss.

Insgesamt heißt das: Für $n \geq 2$ ist n! niemals eine Quadratzahl.
Was zu beweisen war.