43

Es ist zu beweisen, dass für alle von Null verschiedene natürliche Zahlen die Gleichung $ggT(n!+1,(n+1)!+1)=1$ gilt.

Lösung:

$(n+1)!+1=n!\cdot(n+1)+1=n!\cdot(n+1)+(n+1)-n=(n+1)\cdot(n!+1)-n$.

Sei $d=ggT(n!+1,(n+1)!+1)$, daraus folgt $d\,|\,(n+1)!+1$ und $d\,|\,n!+1$.

Wegen der Teilbarkeitsregel $a\,|\,b \wedge a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,b-c$ kann für $a=d, b=(n+1)!+1, c=n!+1$ gesetzt werden und man erhält

$d\,|\,(n+1)!+1-(n!+1)=d\,|\,(n+1)\cdot n!+1-n!-1=d\,|\,n\cdot n!+n!+1-n!-1=d\,|\,n\cdot n!$ woraus folgt

$d\,|\,n$ und $d\,|\,n!$.

Es muss noch gezeigt werden, dass d = 1 gilt, was anhand von $n!+1$ nachzuweisen ist.

Es gelten folgende Teilbarkeitsregeln:

$v=w+r \Leftrightarrow r=v-w$

Setzt man $ggT(v,w)=e$, dann gelten auch folgende Aussagen:

$e\,|\,v \wedge e\,|\,w \Rightarrow e\,|\,v-w$

Da nun $r=v-w$ ist, folgt aus $e\,|\,v-w \Rightarrow e\,|\,r$

Also lässt sich folgern:

Wenn $ggT(v,w)=e$ und $e\,|\,w \wedge e\,|\,r$, dann gilt auch $ggT(w,r)=e$

Setzt man nun v = $n!+1$, w = n! , d = e und r = 1

dann ist $ggT(n!+1,n!)=ggT(n!,1)=d$ und daraus folgt d = 1.

Was zu beweisen war.