44

Es ist zu beweisen, dass n^4+4 für keine natürliche Zahl $n>1$ eine Primzahl ist.

Lösung:

$$n^4+4=(n^2)^2+4n^2+2^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=\left[(n^2+2)+2n\right]\cdot\left[(n^2+2)-2n\right]$$

$$=(n^2+2n+2)\cdot(n^2-2n+2)$$

Jede Primzahl p lässt sich darstellen als $p=1\cdot p$.

Da für $n>1$ folgt, dass $n^2+2n+2>n^2-2n+2$, dann muss $n^2-2n+2=1$ und $n^2+2n+2=p$ sein.

Wahr ist die Aussage $(n^2-2n+2=1)\wedge(n^2+2n+2=p)$ aber nur dann, wenn beide Teile der Aussage wahr sind.

$n^2-2n+2=1 \Leftrightarrow n^2-2n=-1 \Leftrightarrow n(n-2)=-1$ kann für kein $n>1$ wahr sein.

Folglich kann n^4+4 für keine natürliche Zahl $n>1$ eine Primzahl sein.

Was zu beweisen war.