

53

Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 kann man $7! = 5040$ verschiedene siebenstellige Zahlen, deren Ziffern alle verschieden sind, bilden. Es ist zu beweisen, dass keine dieser Zahlen eine andere dieser Zahlen teilt.

Lösung:

Sei n irgendeine siebenstellige Zahl, die durch Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 entstanden ist, dann gilt $\mu_9(n) = \mu_9(Q(n)) = \mu_9(1+2+3+4+5+6+7) = \mu_9(28) = 1$.

Seien $a > b$ verschiedene dieser Zahlen, dann gilt: $\frac{a}{b} \leq \frac{7654321}{1234567} < 7$ und $\frac{a}{b} \notin \mathbb{N}$.

Angenommen $\frac{a}{b} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Setzt man $t = \frac{a}{b}$, dann folgt daraus

$$a = b \cdot t \Rightarrow \mu_9(a) = \mu_9(b \cdot t) = \mu_9(\mu_9(b) \cdot \mu_9(t)) = \mu_9(1 \cdot t) = t > 1.$$

Das steht im Widerspruch zu $\mu_9(n) = 1$.

Die Division $\frac{a}{b}$ ist für $a > b$ also undurchführbar.

Was zu beweisen war.